

事象を数学的に考察した過程を関連付ける活動を通して、 論理的に説明する力を高める授業

瀬野 大吾

1 単元名 整数の性質 (1年) (特設単元)

2 目標 ○ 任意のいくつかの異なる自然数のうちの2数の差について性質を調べる活動を通して、ある性質が必ず存在するための条件を、場合を尽くしたり、鳩ノ巣原理を用いたりして論理的に説明することができる。

3 評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
・ 基本的な数の性質について理解することができる。	・ ある数の性質が必ず存在するための条件を、場合を尽くしたり、鳩ノ巣原理を用いたりして論理的に説明することができる。	・ 論理的に考察することやそれを説明することの有用性を実感し、数の世界に興味をもったり、その考え方を数学から離れて活用しようとしたりする態度。

4 本単元を学習する意義

本単元は、新学習指導要領の改訂を見据えた特設単元である。2数の差に着目することを通して、偶数や奇数、倍数などの数の性質について考察する活動を行う。数の性質を見いだしたり、それを明らかにしたりすることを通して、生徒は事象を統合的・発展的に考察したり、論理的に表現したりすることを学習する。

数自体を考察の対象としたり、数の性質を学習したりすることは数学教育の基盤となる。生徒は、小学校算数科において、偶数や奇数、倍数や約数などの数の性質について学習してきた。数の性質は探究するほどに奥深く、美しさを実感できる数学教育の花形教材である。しかしながら、数の性質を探究する初発の動機付けや意欲の醸成には数学教育としての課題がある。そうした中において、素朴な活動を通して興味を引き付け、課題解決の見通しを立てやすく、解決の結果に論理の美しさを感じることで本単元を導入として扱うことは意義深い。数の性質を追究する活動を通して、場合を尽くすことや鳩ノ巣原理などの数学的な考え方について有用性を実感するのである。こうした学びを導入として扱うことによって、素数や素因数分解などを活用した整数の性質のさらなる探究へ向けて、生徒の主体的な学びを促す。そうすることによって、生徒はこの考え方を数学の世界の中で、別の文脈に適応させてみたいと思ったり、実社会の中で適応できる文脈はないかと探してみたいと思ったりする。身の回りの様々な事象について、数学の授業で培った考え方を利用していくことができた時に、生徒は数学を学ぶことや論理的に思考することのよさを実感するのである。

¹ 本単元では「 n 個の鳩ノ巣に $n+1$ 羽の鳩を入れる場合、必ずどれかの鳩ノ巣には2羽以上の鳩が入っていること」とする。

5 本単元における手だて

<手だてア>

任意の自然数の差に現れる法則を見だし、条件変更を通して発展的に考察していく教材構成とする。

数の性質を見だし、論理的に説明する必要性や有用性を実感し、主体的に数の性質の追究に取り組もうとする態度という資質・能力を発揮させるために行う。

○ 任意の3つの自然数について、そのうちの2数の差の中に、必ず偶数が存在することを説明する活動

生徒それぞれに異なる（異なる必要性はないが、後に0が偶数か否かという議論がノイズになるため）3つの自然数を選ばせる。そのうちの2数を選び取り、その差を求めると、中に必ず偶数が存在する。このことを全体で共有した後、次の発問を行う。

発問「3つの異なる自然数の中から2数を選び、その差を求めると、差の中に必ず偶数が存在することの説明をつくりなさい。」

生徒は自分が選んだ3つの自然数について調べたことを通して、帰納的に予想は立てている。しかしながら、必ず存在することについて、説明をつくる経験は乏しい。故に、どうすれば説明することができるのかという解決方法の見通しをもつために、対象や他者と対話する。その時、自然数について、偶数や奇数という数の性質に着目した見方をすることで、説明の見通しをもつことができるようになる。予想される反応は次のようなものである。

予想される生徒の反応

自然数は偶数か奇数なので、3つの自然数の組み合わせは、次の①～④のいずれかである。

偶数, 偶数, 偶数 …① 偶数, 偶数, 奇数 …②

偶数, 奇数, 奇数 …③ 奇数, 奇数, 奇数 …④

2数の差が偶数になるのは、(偶数) - (偶数) か (奇数) - (奇数) の場合なので、①②③④のいずれも、必ず差が偶数になる場合を含んでいる。

よって、3つの異なる自然数の中から2数を選び、その差を求めると、差の中に必ず偶数が存在すると言える。

このような活動を通して、数をその性質に着目して見ていくことの有用性を感じ、数の性質に興味を抱き始める。

○ 任意の4つの自然数について、そのうちの2数の差の中に、必ず3の倍数が存在することを説明する活動

問いの条件を変更し、4つの異なる自然数を選ばせ、そのうちの2数の差について調べさせる。その差の中に3の倍数が存在するかを問う。全員に3の倍数が存在したことを確認した後、「2数の差の中に3の倍数が存在しないような4つの異なる自然数を選ぶことはできますか。」と問う。すると生徒は、4つの異なる自然数を選ぶために試行錯誤を行う。何度か

試みるうちに、そのような4つの自然数はないのではないかという結果の見通しをもつ。

これらの働き掛けによって生徒は、「なぜそのような4つの自然数がないのか」という疑問を抱き、「必ず3の倍数が存在する理由について追究してみたい」という目的意識が醸成され、これまでの学びを活用して説明したいという思いを抱き、次の課題を見いだす。

＜本單元における課題＞

数の性質について説明するためには、どのように表現すればよいのだろうか。

＜手だてイ＞

帰納的に見いだした数理を共有し、その理由を演繹的に説明する活動を組織する。

事象を数理的に考察する際に、結果や方法についての見通しをもつ力や、それがいつでも成り立つのかやなぜそう言えるのかについて論理的に説明する力という資質・能力を発揮させるために行う。

生徒はまず、自分が任意に選んだいくつかの自然数について操作活動を行い、追究した結果を得る。その後、同じように活動した他者の結果を知ることによって、事象を帰納的に考察するきっかけを得る。加えて、その結果にならないように任意の数を選び直すために試行錯誤をすることなどによって、帰納的に見いだした数理に対する信憑性が高まっていく。このような活動を通して、対象世界との対話を深め、必ず同じ結果になることに興味を抱いたり、なぜそうなるのかについて追究してみたくなったりする。こうして生徒は対象世界に没入し、事象をより数理的に考察していくのである。さらに、数学の授業において、生徒が帰納的に見いだした数理について、なぜそうなるのかを考察するのは必然である。生徒はなぜそうなるのかについて自分なりに考察し、見通しをもつと他者と交流したくなる。その際、説明は口頭で行う段階や記述として書き起こす段階など様々であるが、他者と考えを共有したり、吟味したりするには、記述することが望ましいことは共通理解できるであろう。その上で、自分なりに論理的に説明を記述し、ホワイトボードを用いて4人班で交流する活動を組織する。互いの説明のよいところを持ち寄り、協同で説明を創り上げる。こうした活動によって、他者と交流する中でよりよい表現へと洗練されていくのである。

これらの働き掛けによって、生徒は事象を数理的に考察し、自分なりに数理を明らかにしていく過程で、対象世界や他者との対話が促され、事象について論理的に納得し、そのことを説明することができるようになる。

＜手だてウ＞

解決した問題を異なるプロセスで解決する問題を提示したり、単元を振り返ったりする活動を組織する。

事象を数理的に考察する課題解決過程を振り返り、どのように思考したのかについてメタ認知を促すことを通して、同様の考え方をを用いて、発展的な問いを解決したり、数学の世界を離れた実社会の中の事象を、今までとは違う見方でとらえたりする力という資質・能力を発揮させるために行う。

生徒は任意の4つの自然数について、そのうちの2数の差の中に必ず3の倍数が存在することの理由を考察する過程において、まず数の性質について「3で割り切れる数」と「3で割り切れない数」という見方に着目し、次のように考えることが予想される。

予想される生徒の反応

自然数は3で割り切れる数か3で割り切れない数なので、4つの自然数の組み合わせは、3で割り切れる数をA、3で割り切れない数をBとすると、次の①～⑤のいずれかである。

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| A, A, A, A …① | A, A, A, B …② | A, A, B, B …③ |
| A, B, B, B …④ | B, B, B, B …⑤ | |

ここで、生徒は差が3の倍数になる場合について考える。3で割り切れる数同士の差が必ず3の倍数になることや3で割り切れる数と3で割り切れない数との組み合わせでは決して3の倍数にはならないことは容易に理解できる。しかしながら、これでは上記の④、⑤の場合については差の中に3の倍数が存在すると説明することができない。生徒は、帰納的に見いだした「必ず3の倍数が存在する」という見通しと、その理由を論理的に説明しようとする事との間にずれを感じる。そこで、帰納的に見いだした過程を振り返ると、3で割り切れない数同士の差の中にも、3の倍数が存在することを確認する。3で割り切れない数同士の差について調べたことを振り返ると、3の倍数にならない場合も存在することが確認される。すると生徒は、「3で割り切れる数」と「3で割り切れない数」という数の見方では説明しきれないことを理解する。そこで、授業者が「3で割り切れない数」について、3で割った余りに着目するよう促す。生徒は余りに着目することによって、これまで「3で割り切れるかどうか」としてとらえていた数の性質を、「3で割るといくつ余るか」としてとらえ直す。そうすることによって、生徒は次のように考えを修正する。

予想される生徒の反応

4つの自然数の組み合わせは、3で割ると0余る数をA、3で割ると1余る数をB、3で割ると2余る数をCとすると、次の①～⑮のいずれかである。

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| A, A, A, A …① | B, B, B, B …② | C, C, C, C …③ |
| A, A, A, B …④ | A, A, A, C …⑤ | A, A, B, B …⑥ |
| A, A, C, C …⑦ | A, A, B, C …⑧ | A, B, B, B …⑨ |
| A, C, C, C …⑩ | A, B, B, C …⑪ | A, B, C, C …⑫ |
| B, B, B, C …⑬ | B, B, C, C …⑭ | B, C, C, C …⑮ |

2数の差が3の倍数になるのは、 $A - A$ 、 $B - B$ 、 $C - C$ の場合なので、

①～⑮のいずれも、必ず差が3の倍数になる場合を含んでいる。

よって、4つの異なる自然数の中から2数を選び、その差を求めると、差の中に必ず3の倍数が存在すると言える。

しかしながら、このように①～⑮の場合を尽くすことや、この15通りで場合が尽くされていることを確認することが難しい。生徒は「場合を尽くす」という考え方に有用性は感じているものの、一方でその適応の難しさや物理的限界がありそうだという感覚を覚えるだろ

う。このように生徒は、課題解決の過程において、考察したことを振り返り、自然と思考にメタ認知が促されていく。ここで、授業者が「鳩ノ巣原理」について次のように紹介する。

自然数は、3で割ると0余る数（3で割り切れる数）か3で割ると1余る数か3で割ると2余る数のいずれかなので、3で割ると0余る数をA、3で割ると1余る数をB、3で割ると2余る数をCとすると、すべての自然数は次のような3つの部屋のどれかに必ず入る。

A	B	C
---	---	---

ここで、2数の差が3の倍数になるのは、 $A - A$ 、 $B - B$ 、 $C - C$ の場合である。

4つの異なる自然数が3つの部屋のいずれかに入るのだから、どこかの部屋には必ず2つ以上の自然数が入る。

よって、4つの異なる自然数の中から2数を選び、その差を求めると、差の中に必ず3の倍数が存在すると言える。

生徒には、A、B、Cを鳩ノ巣、4つの自然数を鳩に例え、どこかの巣には必ず2羽以上の鳩が入るという自明な原理だが、このように活用するとすっきりとした論理で説明することができることを伝える。生徒は「鳩ノ巣原理」を用いた説明に驚くであろう。同時に論理の美しさに憧れを抱くであろう。この考え方を共有した生徒の中には、先の「3つの異なる自然数についての問い」を、余りに着目した考え方や鳩ノ巣原理でとらえ直す者も出てくる。そうする中で生徒は、「鳩ノ巣原理」を用いて問題を解決してみたいという目的意識が醸成される。そこで、次のような問いを提示する。

任意のいくつかの自然数のうちの2数の差の中に、必ず4の倍数があるためには、はじめに自然数がいくつあればよいのかについて説明をつくりなさい。

この問いを解決するために、場合を尽くして述べることは途方もないことであることを生徒は理解できる。この問いは、これまでとは逆向きに問うことによって、鳩ノ巣原理の論理を真に理解できたかどうかを確かめることのできるものである。この解決を共有することを通して、生徒は鳩ノ巣原理という考え方の理解を確かにしていくのである。

これらの働き掛けによって、生徒は数の性質をより細かな見方でとらえ直すことの有用性を感じ、数の性質の奥深さを実感する。また、鳩ノ巣原理を活用できた喜びを感じ、数学へのさらなる活用の意欲を抱く。さらに、課題解決過程においてもメタ認知は促されているが、それを単元末に意識的に促すことによって、メタ認知はより強化され、適応範囲の広がりや内容の深まりへとつながっていくのである。そうして、例えば「5人の人間が集まれば、その中に同じ血液型のペアが必ず1組以上は存在する」などと、鳩ノ巣原理を適応した見方を述べることができるようになる。これこそ、自らの数学の学びが再構成され、数学の世界を離れた実社会の中の事象について、今までとは違った見方でとらえることができる力という資質・能力を発揮した姿そのものである。

<参考・引用文献>

近藤俊明 2017 「数学の教材事例集」 新潟教材研究会

6 単元の構想 (全6時間 本時5/6)

目的意識	生徒の意識	学習活動・学習内容	教師の支援・指導	評価の観点 評価の方法
整数の性質について必ず3の倍数は存在するのかな どうすれば必ず偶数が存在するといえるのかな 必ず3の倍数は存在するのかな 3の倍数が存在することを説明するのは難しい	① 任意の3つの自然数について、そのうちの2数の差の中に、必ず偶数が存在することを見いだす。 【偶数・奇数の性質】 ・ 2数の差を調べ、偶数があることに気付く。 ② 必ず偶数が存在することを説明する。 ・ 偶数と奇数の組み合わせに着目し、場合を尽くして説明する。 ・ ホワイトボードを用いて、4人班で説明を交流して練り上げる。 ③ 任意の4つの自然数について、そのうちの2数の差の中に、必ず3の倍数があることを見いだす。 【倍数の性質・余り】 ・ 2数の差について調べる。 ・ 帰納的に3の倍数がありそうだと気付く。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> 【本単元における課題】 数の性質について説明するには、どのように表現すればよいのだろうか。 </div> ④ 必ず3の倍数が存在することを説明する。 ・ 3で割り切れる数と割り切れない数とに分けても説明できないことに気付く。 ・ 余りに着目し、3で割ると余りが0, 1, 2の3種類に場合分けをする。 ・ ホワイトボードを用いて、4人班で説明を交流して練り上げる。 ・ 場合を尽くして記述したり、鳩ノ巣原理を用いて説明したりする。 【鳩ノ巣原理】	○ 異なる3つの自然数のうちの2数の差の中に偶数があるかを調べさせる。 手だてア 指示：異なる3つの自然数を書きなさい。 指示：そのうちの2数の差の中に、偶数があるかを調べなさい。 ○ 必ず偶数があることを確認する。 発問：必ず偶数が存在することの説明をつくりなさい。 手だてイ ○ 説明を共有させる。 ○ 説明を練り上げさせ、よりよい説明を共有させる。 ○ 条件変更を促し、異なる4つの自然数のうちの2数の差の中に、3の倍数があるかを問う。 手だてア ○ 2数の差の中に3の倍数が存在しないような4つの自然数を考えさせる。 ○ 必ず3の倍数がありそうだという見通しを共有する。 発問：必ず3の倍数が存在することの説明をつくりなさい。 手だてイ ○ 3で割り切れない数にはどのような種類があるのか問い、余りに着目させるよう促す。 ○ 説明を練り上げさせ、よりよい説明を共有させる。 ○ 場合を尽くす大変さと、鳩ノ巣原理の汎用性の高さを認識できるよう支援する。	【知・技】 WS 【思・判・表】 WS 【知・技】 WS 【思・判・表】 WS	
	この前の偶数が存在することも説明できそうだな これまでの学びを応用して説明をつくることができたぞ	⑤ 鳩ノ巣原理を用いて、学習活動①をとらえ直す。 ・ 任意の3つの自然数について、そのうちの2数の差の中に、必ず偶数が存在することを鳩ノ巣原理で説明する。 ⑥ 任意のいくつかの自然数のうちの2数の差の中に、必ず4の倍数があるためには自然数がいくつあればよいのかについて説明をつくる。 ・ 鳩ノ巣原理を用いて、最小5つの自然数であることの説明をつくる。	○ 前時の内容を基に、鳩ノ巣原理について確認する。 ○ 学習活動①の問題を鳩ノ巣原理を用いて説明するよう促す。 ○ 鳩ノ巣原理の考え方の理解と深化を促すために、確認問題を提示する。 手だてウ ○ 場合を尽くして記述することの限界や、鳩ノ巣原理の論理的な美しさを共有する。 手だてイ	【思・判・表】 WS 【思・判・表】 WS
	もっといろいろな数の性質を追究してみたいな	⑦ 単元を振り返る。 ・ 数自体を分析的に考察する見方の有用性や、見いだした性質を論理的に説明することの喜びを実感する。 ・ 数の性質に興味を持ち、さらに数の性質を調べたり、見いだしたことを応用して追究したりしてみたいという意欲をもつ。	○ 単元全体を振り返る活動を組織する。 手だてウ ・ 単元を振り返り、数の世界に魅了されたことや、論理的に考察することのよさを実感したこと、これからどのように活用していきたいのかや、さらに何を学んでみたいのかななどを記述させる。	【思・判・表】 WS 【態】 WS

7 本時の詳細

(1) 前時までの学習を終えた生徒の実態

- 3つの異なる自然数の中から2つを選び、その差を求めると、差の中に必ず偶数が存在することを説明することができる。(学習活動①②, ワークシート①)
- 4つの異なる自然数の中から2つを選び、その差を求めると、差の中に必ず3の倍数が存在することを説明することができる。(学習活動③④, ワークシート②)
- 場合を尽くすことの有用性と限界を理解している。(学習活動②④)
- 自然数を余りに着目する見方で分類することができる。(学習活動④)
- 鳩ノ巣原理の有用性を理解している。(学習活動④)

(2) 本時のねらい

いくつかの異なる自然数の中から2つの数を選び、その差を求めると、必ず4の倍数が存在するためには、はじめに選ぶ自然数はいくつあればよいのかについて考察する活動を通して、余りに着目して数を分類し、はじめに選ぶ自然数が5つあればよいことを説明することができる。

(3) 評価基準

○ 評価の観点—思考・判断・表現

A	B
4で割ったときの余りに着目して自然数を分類し、2つの自然数の差が4の倍数になる場合を考え、はじめに選ぶ自然数が5つあればよいことの説明を、鳩ノ巣原理を適用させて記述することができる。	4で割ったときの余りに着目して自然数を分類し、2つの自然数の差が4の倍数になる場合を考え、はじめに選ぶ自然数が5つあればよいことを記述することができる。

(4) 本時の展開

学習活動・予想される生徒の反応	教師の支援・指導 ■ 評価の観点・方法
<p>① 鳩ノ巣原理の考え方をういて、3つの異なる自然数の中から2つを選び、その差を求めると、差の中に必ず偶数が存在することの説明をとらえ直す活動</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ 2で割ったときの余りに着目して、自然数を2種類に分類する。 ○ 差が偶数になる場合について挙げ尽くす。 ○ 3つの自然数を2種類に分類すると、必ず差が偶数になる組み合わせが存在することを説明する。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 鳩ノ巣原理の理解を促すために、解決済みの問いをとらえ直す活動を組織する。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p><指示></p> <p>3つの異なる自然数の中から2つを選び、その差を求めると、差の中に必ず偶数が存在することを鳩ノ巣原理で説明しなさい。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ○ 余りに着目する見方を通して、数を分類したり、差を考察したりすることを促す。 ○ 生徒が何を鳩ノ巣、鳩ととらえているのかを説明を共有する中で確認する。

<予想される生徒の反応>

- ・ 自然数は偶数か奇数かのいずれかである。
3つの自然数はこの2つのいずれかに入る。3つの自然数は偶数か奇数のどちらかに、少なくとも2つ以上入ることとなる。
差が偶数になるのは偶数－偶数か奇数－奇数のいずれかである。
したがって、3つの異なる自然数の中から2つの数を選び、その差を求めると、必ず偶数が存在すると言える。

② いくつかの自然数のうちの2数の差の中に、必ず4の倍数があるためには自然数がいくつあればよいのかについて説明をつくる活動

- 4で割ったときの余りに着目し、数を分類する。
- 差が4の倍数である場合を挙げ尽くす。
- 自然数を4種類に分類すると、差が4の倍数になるためには同じ種類の数が少なくとも2つ存在すればよいことに気付く。
- 自分なりに記述する。
- 4人班で記述を練り上げる。

<予想される生徒の反応>

- ・ 4で割ったときの余りに着目すると、4で割ると0余る、1余る、2余る、3余る数の4種類である。
これらを鳩ノ巣とする。
次に、差が4の倍数になる場合は、4で割ったときの余りが等しい数同士のみである。
つまり、4つの鳩ノ巣に対して、5羽の鳩がいれば、いずれかの巣に必ず2羽以上の鳩が入ることになる。
したがって、はじめの自然数は5つあればよいことがわかる。

- これまでとは逆向きに問う問いを提示する。 (手だてウ)

<発問>

はじめに自然数がいくつあればよいのでしょうか。説明をつくりなさい。 (手だてイ)

- 自分なりの記述をまとめさせる。
- 4人班で交流する活動を組織する。
- ホワイトボードを配付する。
- 4人班で表現を検討し、記述を練り上げる。
- 班で練り上げた説明を全体で共有させる。

③ 本時を振り返る活動

- 今日の授業を通して、わかったこと、疑問に思ったこと、もっと調べてみたいこと、次に生かしたいことなどを記述する。

<予想される生徒の反応>

- ・ 場合を尽くそうとすると難しい問題でも、鳩ノ巣原理を使うと簡単に説明することができてすごいと思った。
- ・ 鳩ノ巣原理はシンプルだけど、すごい考え方なので、これからは機会があればどんどん使っていきたい。
- ・ 自分の身の回りで鳩ノ巣原理が使えるような場面がないのか考えてみたい。
- ・ 私は5人家族なので、家族の中に必ず同じ血液型の人同士がいる。これは鳩ノ巣原理だ。

- ワークシートを提出する。

- 本時を振り返るよう促す。

<指示>

今日の授業の振り返りを記入しなさい。

- 個人で振り返りを記入させる。

- ワークシートを回収する。

数の性質を調べてみよう①

番 氏名

3つの異なる自然数を選びなさい。その3つの自然数の中から2つの数を選び、その差を求めなさい。

3つの異なる自然数の中から2つの数を選び、

<自分の考え>

<4人班で練り上げた考え>

<他の考え>

【今日の授業を通して、わかったこと、疑問に思ったこと、もっと調べてみたいこと、次に生かしたいことなど】

数の性質を調べてみよう②

番 氏名

4つの異なる自然数を選びなさい。その4つの自然数の中から2つの数を選び、その差を求めなさい。

2つの数の差の中に、
が存在しないような4つの異なる自然数を選ぶことはできますか？

4つの異なる自然数の中から2つの数を選び、その差を求めると、

<自分の考え>

<4人班で練り上げた考え>

<他の考え>

【今日の授業を通して、わかったこと、疑問に思ったこと、もっと調べてみたいこと、次に生かしたいことなど】

数の性質を調べてみよう③

番 氏名

<p>「数の性質を調べてみよう①」のワークシートの問いについて、鳩ノ巣原理を用いた説明をつくり、とらえ直してみよう。</p>	<p><説明></p>
--	-------------------

いくつかの異なる自然数を選びました。そのいくつかの自然数の中から2つの数を選び、その差を求めると、差の中には必ず 2 があることがわかりました。さて、2つの数の差の中に必ず 2 が存在するためには、はじめに選ぶ自然数はいくつあればよいのでしょうか。説明をつくりなさい。

<自分の考え>

<4人班で練り上げた考え>

<他の考え>

【今日の授業を通して、わかったこと、疑問に思ったこと、もっと調べてみたいこと、次に生かしたいことなど】